КОЛИ ВАДИ РОБЛЯТЬ ЖИТТЯ ПРОСТІШИМ:
Посилена жорсткість для дифеоморфізмів кола з особливостями

Олексій ТЕПЛІНСЬКИЙ

Жорсткість — про що йдеться?

Нехай ми маємо:

- досить широкий клас об'єктів $\mathcal{C}$

Жорсткість — про що йдеться?

Нехай ми маємо:

- досить широкий клас об'єктів $\mathcal{C}$
- два відношення еквівалентності $\sim$ та $\approx$ на $\mathcal{C}$, друге сильніше за перше

Жорсткість — про що йдеться?

Нехай ми маємо:

- досить широкий клас об'єктів $\mathcal{C}$
- два відношення еквівалентності $\sim$ та $\approx$ на $\mathcal{C}$, друге сильніше за перше
- підклас $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}$

Жорсткість — про що йдеться?

Нехай ми маємо:

- досить широкий клас об'єктів $\mathcal{C}$
- два відношення еквівалентності $\sim$ та $\approx$ на $\mathcal{C}$, друге сильніше за перше
- підклас $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}$

Клас $\mathcal{C}_1$ є *жорстким*, якщо $\mathcal{C}_1/\sim\ =\ \mathcal{C}_1/\approx$, тобто слабша еквівалентність тягне за собою сильнішу.

Жорсткість — про що йдеться?

Нехай ми маємо:

- досить широкий клас об'єктів $\mathcal{C}$
- два відношення еквівалентності $\sim$ та $\approx$ на $\mathcal{C}$, друге сильніше за перше
- підклас $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}$

Клас $\mathcal{C}_1$ є *жорстким*, якщо $\mathcal{C}_1/\sim\, = \,\mathcal{C}_1/\approx$, тобто слабша еквівалентність тягне за собою сильнішу.

У протилежному випадку про клас $\mathcal{C}_1$ кажуть, що він *гнучкий*.

Жорсткість — про що йдеться? Приклад.

Для дійсних функцій, які визначено на інтервалі I:

$f \sim g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ в певному околі точки $x_0 \in I$;

$f \approx g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ на всьому I.

Жорсткість — про що йдеться? Приклад.

Для дійсних функцій, які визначено на інтервалі I:

$f \sim g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ в певному околі точки $x_0 \in I$;

$f \approx g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ на всьому I.

Клас аналітичних функцій $C^\omega(I)$ є жорстким, клас $C^\infty(I)$ є гнучким.

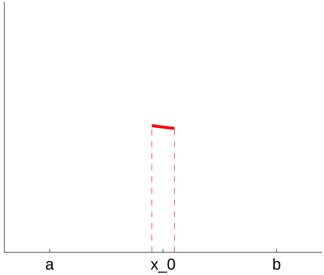
Жорсткість — про що йдеться? Приклад.

Для дійсних функцій, які визначено на інтервалі I:

$f \sim g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ в певному околі точки $x_0 \in I$;

$f \approx g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ на всьому I.

Клас аналітичних функцій $C^\omega(I)$ є жорстким, клас $C^\infty(I)$ є гнучким.



Аналітична функція

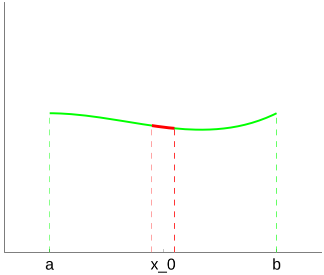
Жорсткість — про що йдеться? Приклад.

Для дійсних функцій, які визначено на інтервалі I:

$f \sim g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ в певному околі точки $x_0 \in I$;

$f \approx g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ на всьому I.

Клас аналітичних функцій $C^\omega(I)$ є жорстким, клас $C^\infty(I)$ є гнучким.



Аналітична функція

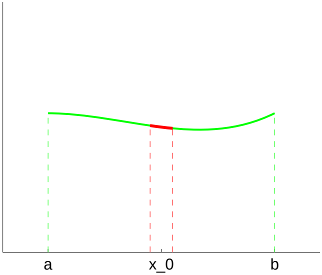
Жорсткість — про що йдеться? Приклад.

Для дійсних функцій, які визначено на інтервалі I:

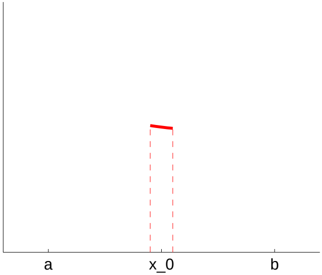
$f \sim g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ в певному околі точки $x_0 \in I$;

$f \approx g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ на всьому I.

Клас аналітичних функцій $C^\omega(I)$ є жорстким, клас $C^\infty(I)$ є гнучким.



Аналітична функція



Неск. гладка функція

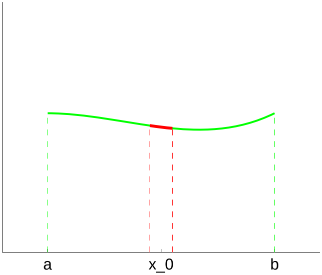
Жорсткість — про що йдеться? Приклад.

Для дійсних функцій, які визначено на інтервалі I:

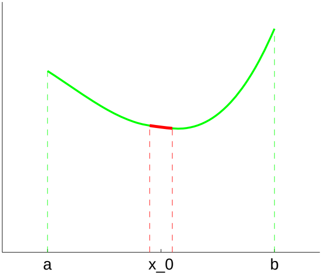
$f \sim g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ в певному околі точки $x_0 \in I$;

$f \approx g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ на всьому I.

Клас аналітичних функцій $C^\omega(I)$ є жорстким, клас $C^\infty(I)$ є гнучким.



Аналітична функція



Неск. гладка функція

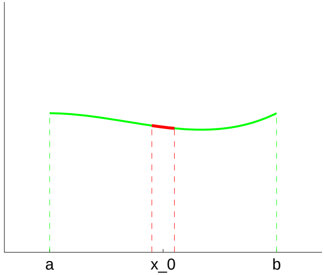
Жорсткість — про що йдеться? Приклад.

Для дійсних функцій, які визначено на інтервалі I:

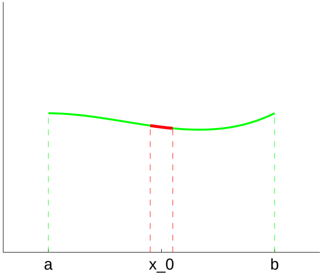
$f \sim g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ в певному околі точки $x_0 \in I$;

$f \approx g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ на всьому I.

Клас аналітичних функцій $C^\omega(I)$ є жорстким, клас $C^\infty(I)$ є гнучким.



Аналітична функція



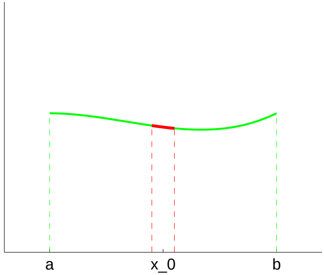
Неск. гладка функція

Для дійсних функцій, які визначено на інтервалі I:

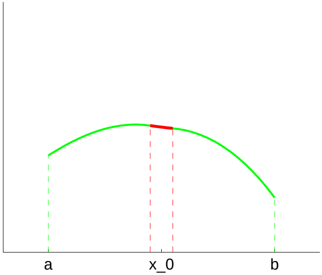
$f \sim g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ в певному околі точки $x_0 \in I$;

$f \approx g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ на всьому I.

Клас аналітичних функцій $C^\omega(I)$ є жорстким, клас $C^\infty(I)$ є гнучким.



Аналітична функція



Неск. гладка функція

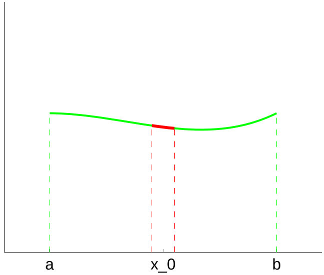
Жорсткість — про що йдеться? Приклад.

Для дійсних функцій, які визначено на інтервалі I:

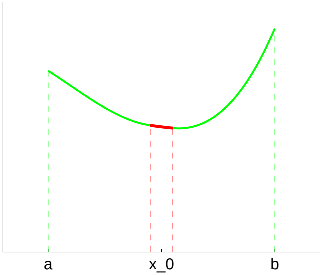
$f \sim g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ в певному околі точки $x_0 \in I$;

$f \approx g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ на всьому I.

Клас аналітичних функцій $C^\omega(I)$ є жорстким, клас $C^\infty(I)$ є гнучким.



Аналітична функція



Неск. гладка функція

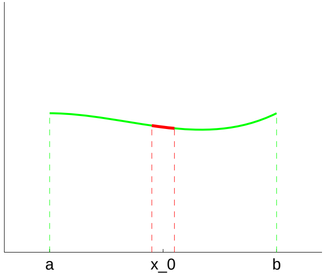
Жорсткість — про що йдеться? Приклад.

Для дійсних функцій, які визначено на інтервалі I:

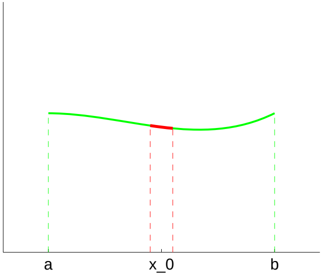
$f \sim g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ в певному околі точки $x_0 \in I$;

$f \approx g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ на всьому I.

Клас аналітичних функцій $C^\omega(I)$ *є жорстким, клас* $C^\infty(I)$ *є гнучким.*



Аналітична функція



Неск. гладка функція

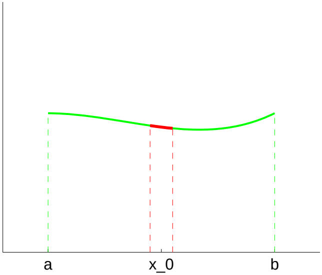
Жорсткість — про що йдеться? Приклад.

Для дійсних функцій, які визначено на інтервалі I:

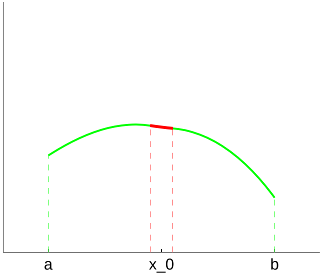
$f \sim g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ в певному околі точки $x_0 \in I$;

$f \approx g$, якщо $f(x) \equiv g(x)$ на всьому I.

Клас аналітичних функцій $C^\omega(I)$ є жорстким, клас $C^\infty(I)$ є гнучким.



Аналітична функція



Неск. гладка функція

Еквівалентності гомеоморфізмів кола

Клас об'єктів $\mathcal{C} = H(\mathbb{S}^1)$ — гомеоморфізми одиничного кола $\mathbb{S}^1$, що зберігають його орієнтацію.

Еквівалентності гомеоморфізмів кола

Клас об'єктів $\mathcal{C} = H(\mathbb{S}^1)$ — гомеоморфізми одиничного кола $\mathbb{S}^1$, що зберігають його орієнтацію.

Нехай $T \in H(\mathbb{S}^1)$, а ϕ — певна заміна координат (теж гомеоморфізм). У змінених координатах відображення T матиме вигляд $\tilde{T} = \phi \circ T \circ \phi^{-1}$. Кажуть, що T і $\tilde{T}$ є *спряженими* за допомогою ϕ.

Клас об'єктів $\mathcal{C} = H(\mathbb{S}^1)$ — гомеоморфізми одиничного кола $\mathbb{S}^1$, що зберігають його орієнтацію.

Нехай $T \in H(\mathbb{S}^1)$, а ϕ — певна заміна координат (теж гомеоморфізм). У змінених координатах відображення T матиме вигляд $\tilde{T} = \phi \circ T \circ \phi^{-1}$. Кажуть, що T і $\tilde{T}$ є *спряженими* за допомогою ϕ.

- Топологічна еквівалентність: $T \sim \tilde{T}$, якщо $\tilde{T} = \phi \circ T \circ \phi^{-1}$, $\phi \in H(\mathbb{S}^1)$.

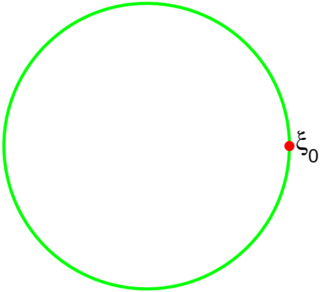
Еквівалентності гомеоморфізмів кола

Клас об'єктів $\mathcal{C} = H(\mathbb{S}^1)$ — гомеоморфізми одиничного кола $\mathbb{S}^1$, що зберігають його орієнтацію.

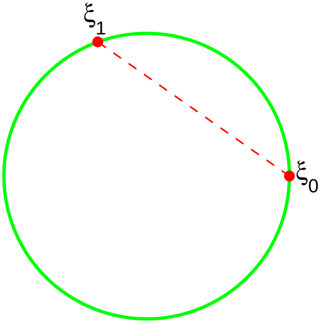
Нехай $T \in H(\mathbb{S}^1)$, а ϕ — певна заміна координат (теж гомеоморфізм). У змінених координатах відображення T матиме вигляд $\tilde{T} = \phi \circ T \circ \phi^{-1}$. Кажуть, що T і $\tilde{T}$ є *спряженими* за допомогою ϕ.

- Топологічна еквівалентність: $T \sim \tilde{T}$, якщо $\tilde{T} = \phi \circ T \circ \phi^{-1}$, $\phi \in H(\mathbb{S}^1)$.
- Гладка (геометрична) еквівалентність: $T \approx \tilde{T}$, якщо $\tilde{T} = \phi \circ T \circ \phi^{-1}$, $\phi \in H^1(\mathbb{S}^1)$ (заміна координат є C^1-гладким дифеоморфізмом).

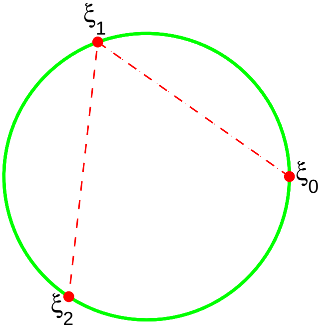
Еквівалентності гомеоморфізмів кола (продовження)



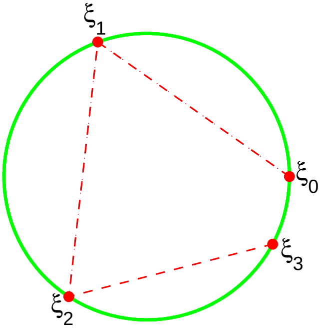
Еквівалентності гомеоморфізмів кола (продовження)



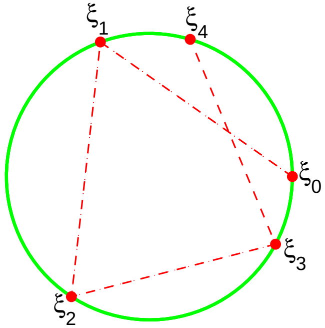
Еквівалентності гомеоморфізмів кола (продовження)



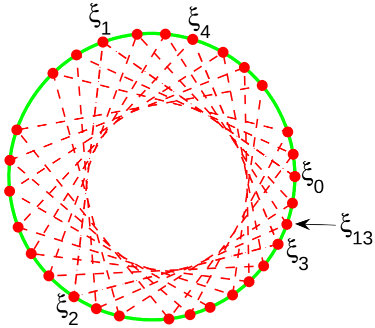
Еквівалентності гомеоморфізмів кола (продовження)



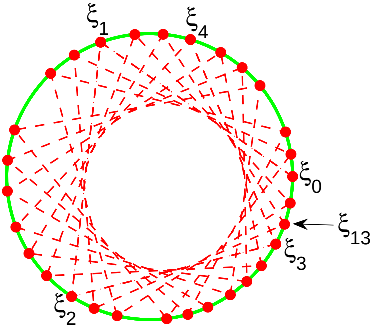
Еквівалентності гомеоморфізмів кола (продовження)



Еквівалентності гомеоморфізмів кола (продовження)



Еквівалентності гомеоморфізмів кола (продовження)



Точки траєкторії $\xi_i = T^i(\xi_0)$, $i \in \mathbb{Z}$, впорядковуються на колі *певним чином.*

Еквівалентності гомеоморфізмів кола (продовження)

- Комбінаторна еквівалентність: $T \overset{comb}{\sim} \tilde{T}$, якщо порядок розташування точок їхніх траєкторій $\xi_i = T^i(\xi_0)$, $i \in \mathbb{Z}$, та $\tilde{\xi}_i = \tilde{T}^i(\tilde{\xi}_0)$, $i \in \mathbb{Z}$, один і той самий.

Еквівалентності гомеоморфізмів кола (продовження)

- Комбінаторна еквівалентність: $T \overset{comb}{\sim} \tilde{T}$, якщо порядок розташування точок їхніх траєкторій $\xi_i = T^i(\xi_0)$, $i \in \mathbb{Z}$, та $\tilde{\xi}_i = \tilde{T}^i(\tilde{\xi}_0)$, $i \in \mathbb{Z}$, один і той самий.
- Топологічна еквівалентність: $T \sim \tilde{T}$, якщо $\tilde{T} = \phi \circ T \circ \phi^{-1}$, $\phi \in H(\mathbb{S}^1)$.
- Гладка (геометрична) еквівалентність: $T \approx \tilde{T}$, якщо $\tilde{T} = \phi \circ T \circ \phi^{-1}$, $\phi \in H^1(\mathbb{S}^1)$ (заміна координат є C^1-гладким дифеоморфізмом).

Еквівалентності гомеоморфізмів кола (продовження)

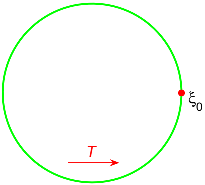
- Комбінаторна еквівалентність: $T \overset{comb}{\sim} \tilde{T}$, якщо порядок розташування точок їхніх траєкторій $\xi_i = T^i(\xi_0)$, $i \in \mathbb{Z}$, та $\tilde{\xi}_i = \tilde{T}^i(\tilde{\xi}_0)$, $i \in \mathbb{Z}$, один і той самий.
- Топологічна еквівалентність: $T \sim \tilde{T}$, якщо $\tilde{T} = \phi \circ T \circ \phi^{-1}$, $\phi \in H(\mathbb{S}^1)$.
- Гладка (геометрична) еквівалентність: $T \approx \tilde{T}$, якщо $\tilde{T} = \phi \circ T \circ \phi^{-1}$, $\phi \in H^1(\mathbb{S}^1)$ (заміна координат є C^1-гладким дифеоморфізмом).

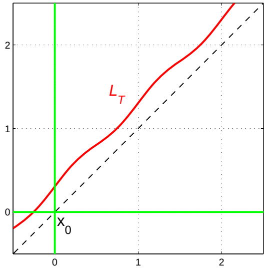
$$T \approx \tilde{T} \quad \Rightarrow \quad T \sim \tilde{T} \quad \Rightarrow \quad T \overset{comb}{\sim} \tilde{T}$$

Число обертання

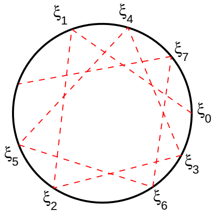
Одиничне коло — це факторизація дійсної осі за $\mod 1$.

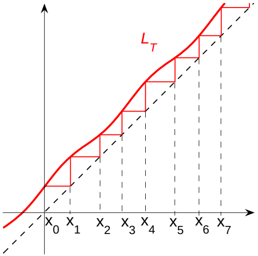
Підняття гомеоморфізму $T \in H(\mathbb{S}^1)$ на дійсну вісь — це такий гомеоморфізм $L_T \in H(\mathbb{R})$, що $L_T(x+1) = L_T(x) + 1$, і $T = L \bmod 1$.





Піднятт я гомеоморфізму $T \in H(\mathbb{S}^1)$ на дійсну вісь — це такий гомеоморфізм $L_T \in H(\mathbb{R})$, що $L_T(x+1) = L_T(x) + 1$, і $T = L \bmod 1$.

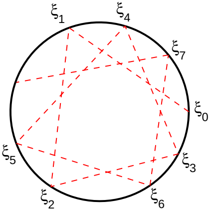


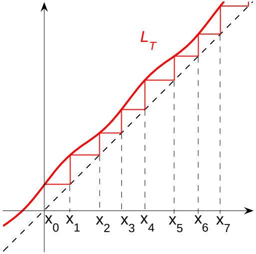


$x_i = L_T^i(x_0)$, $i \in \mathbb{Z}$, — *піднята* траєкторія, $\xi_i = x_i \bmod 1$.

Число обертання

Піднятття гомеоморфізму $T \in H(\mathbb{S}^1)$ на дійсну вісь — це такий гомеоморфізм $L_T \in H(\mathbb{R})$, що $L_T(x+1) = L_T(x) + 1$, і $T = L \bmod 1$.





$x_i = L_T^i(x_0)$, $i \in \mathbb{Z}$, — *піднята* траєкторія, $\xi_i = x_i \bmod 1$.

Число обертання $\rho = \lim_{i\to\infty} \frac{x_i}{i} \bmod 1$.

Число обертання (продовження)

- Число обертання $\rho = \rho(T) = \lim_{i\to\infty} \frac{x_i}{i} \mod 1$ не залежить від вибору початкової точки x_0.

Число обертання (продовження)

- Число обертання $\rho = \rho(T) = \lim_{i\to\infty} \frac{x_i}{i} \mod 1$ не залежить від вибору початкової точки x_0.

Найпростіший гомеоморфізм кола з числом обертання ρ — це лінійний поворот (зсув) на ρ:

$$R_\rho(\xi) = \xi + \rho$$

Число обертання (продовження)

- Число обертання $\rho = \rho(T) = \lim_{i\to\infty} \frac{x_i}{i} \mod 1$ не залежить від вибору початкової точки x_0.

Найпростіший гомеоморфізм кола з числом обертання ρ — це лінійний поворот (зсув) на ρ:

$$R_\rho(\xi) = \xi + \rho$$

- $\rho \notin \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad T$ не має нерухомих точок.

Число обертання (продовження)

- Число обертання $\rho = \rho(T) = \lim_{i\to\infty} \frac{x_i}{i} \mod 1$ не залежить від вибору початкової точки x_0.

Найпростіший гомеоморфізм кола з числом обертання ρ — це лінійний поворот (зсув) на ρ:

$$R_\rho(\xi) = \xi + \rho$$

- $\rho \notin \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad T$ не має нерухомих точок.

Надалі розглядаємо лише гомеоморфізми з ірраціональними числами обертання: $T \in H_{\text{irr}}(\mathbb{S}^1)$.

Комбінаторна еквівалентність: теорія Пуанкаре

Теорема (Пуанкаре, XIX ст.)

В класі $H_{\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$ *маємо:* $T \overset{comb}{\sim} R_\rho$.

Теорема (Пуанкаре, XIX ст.)

В класі $H_{\text{irr}}(\mathbb{S}^1)$ *маємо:* $T \overset{comb}{\sim} R_\rho$.

Отже, комбінаторна еквівалентність гомеоморфізмів кола — це просто рівність їхніх (ірраціональних) чисел обертання:

Наслідок

В класі $H_{\text{irr}}(\mathbb{S}^1)$ *маємо:* $T \overset{comb}{\sim} \tilde{T} \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \tilde{\rho}$.

Топологічна еквівалентність: теорія Данжуа

Теорема (Данжуа, 1932)

В класі $H^2_{\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$ *маємо:* $T \sim R_\rho$.

Топологічна еквівалентність: теорія Данжуа

Теорема (Данжуа, 1932)

В класі $H^2_{\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$ *маємо:* $T \sim R_\rho$.

Отже, певна гладкість комбінаторно еквівалентних гомеоморфізмів кола забезпечує їхню топологічну еквівалентність:

Наслідок

В класі $H^2_{\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$ *маємо:* $T \sim \tilde{T} \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \tilde{\rho}$.

Гладка еквівалентність: теорія КАМ, теорія Ермана

Життя стає важким!

Гладка еквівалентність: теорія KAM, теорія Ермана

Життя стає важким!

Твердження (контрприклад Арнольда, 1961)

В класі $H^{\omega}_{\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$ *існує* $T \not\approx R_\rho$.

Життя стає важким!

Твердження (контрприклад Арнольда, 1961)

В класі $H^{\omega}_{\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$ існує $T \not\approx R_\rho$.

Діофантові числа: $\rho \in D$, якщо $\exists \alpha \geq 0 \ \exists C > 0 \ \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}: \ \left|\rho - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^{2+\alpha}}$.

Гладка еквівалентність: теорія КАМ, теорія Ермана

Життя стає важким!

Твердження (контрприклад Арнольда, 1961)

В класі $H^{\omega}_{\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$ існує $T \not\approx R_\rho$.

Діофантові числа: $\rho \in D$, якщо $\exists \alpha \geq 0\ \exists C > 0\ \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}: \ \left|\rho - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^{2+\alpha}}$.

Теорема (Арнольд-Мозер, Ерман-Йоккос, 1961–84)

В класі $H^{\infty}_{\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$ маємо: якщо $\rho \in D$, то $T \approx R_\rho$.

Гладка еквівалентність: теорія КАМ, теорія Ермана

Життя стає важким!

Твердження (контрприклад Арнольда, 1961)

В класі $H^{\omega}_{\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$ *існує* $T \not\approx R_\rho$.

Діофантові числа: $\rho \in D$, якщо $\exists \alpha \geq 0 \; \exists C > 0 \; \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}: \; \left|\rho - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^{2+\alpha}}$.

Теорема (Арнольд-Мозер, Ерман-Йоккос, 1961–84)

В класі $H^{\infty}_{\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$ *маємо: якщо* $\rho \in D$, *то* $T \approx R_\rho$.

Отже, певна гладкість топологічно еквівалентних гомеоморфізмів кола забезпечує їхню гладку еквівалентність лише за умови діофантовості числа обертання:

Гладка еквівалентність: теорія КАМ, теорія Ермана

Життя стає важким!

Твердження (контрприклад Арнольда, 1961)

В класі $H^{\omega}_{\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$ існує $T \not\approx R_\rho$.

Діофантові числа: $\rho \in D$, якщо $\exists \alpha \geq 0\ \exists C > 0\ \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \left|\rho - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^{2+\alpha}}$.

Теорема (Арнольд-Мозер, Ерман-Йоккос, 1961–84)

В класі $H^{\infty}_{\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$ маємо: якщо $\rho \in D$, то $T \approx R_\rho$.

Отже, певна гладкість топологічно еквівалентних гомеоморфізмів кола забезпечує їхню гладку еквівалентність лише за умови діофантовості числа обертання:

Наслідок (Жорсткість для дифеоморфізмів кола)

В класі $H^{\infty}_{\mathrm{dioph}}(\mathbb{S}^1)$ маємо: $T \approx \tilde{T} \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \tilde{\rho}$.

Дифеоморфізми кола з особливостями

Дифеоморфізм кола з особливістю — це гомеоморфізм T, що має гладкість C^s, $s > 2$, скрізь на колі окрім однієї точки $\xi_0 \in \mathbb{S}^1$.

Дифеоморфізм кола з особливістю — це гомеоморфізм T, що має гладкість C^s, $s > 2$, скрізь на колі окрім однієї точки $\xi_0 \in \mathbb{S}^1$.

Публікації

1. А. Ю. Теплинский, К. М. Ханин. Жёсткость для диффеоморфизмов окружности с особенностями. *Успехи математических наук*, **59**, №2, 2004, С. 137–160.
2. K. Khanin and A. Teplinsky. Robust rigidity for circle diffeomorphisms with singularities. *Invent. Math.*, **169**, no. 1 (July), 2007, pp. 193–218.
3. О. Ю. Теплінський. Гіперболічна підкова для дифеоморфізмів кола зі зламом. *Нелінійні Коливання*, **11**, №1, 2008, С. 112–127.

Типи особливостей: критичний поворот кола

Розглядається $\mathrm{Cr}^{s}_{\beta}(\mathbb{S}^1)$ — клас критичних поворотів кола гладкості $s > 2$ з порядком критичної точки $\beta > 1$.

Типи особливостей: критичний поворот кола

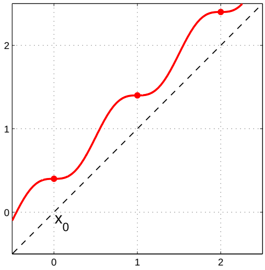
Розглядається $\mathrm{Cr}^s_\beta(\mathbb{S}^1)$ — клас критичних поворотів кола гладкості $s > 2$ з порядком критичної точки $\beta > 1$. $T \in \mathrm{Cr}^s_\beta(\mathbb{S}^1)$, якщо

- $T \in H(\mathbb{S}^1)$,
- $T \in C^s(\mathbb{S}^1)$, $s > 2$,
- $T'(\xi) > 0$ при $\xi \neq \xi_0$,
- $|T(\xi) - T(\xi_0)| = C|\xi - \xi_0|^\beta + o(|\xi - \xi_0|^\beta)$, $C > 0$.

Типи особливостей: критичний поворот кола

Розглядається $\mathrm{Cr}^s_\beta(\mathbb{S}^1)$ — клас критичних поворотів кола гладкості $s > 2$ з порядком критичної точки $\beta > 1$. $T \in \mathrm{Cr}^s_\beta(\mathbb{S}^1)$, якщо

- $T \in H(\mathbb{S}^1)$,
- $T \in C^s(\mathbb{S}^1)$, $s > 2$,
- $T'(\xi) > 0$ при $\xi \neq \xi_0$,
- $|T(\xi) - T(\xi_0)| = C|\xi - \xi_0|^\beta + o(|\xi - \xi_0|^\beta)$, $C > 0$.



Типи особливостей: поворот кола зі зламом

Розглядається $\mathrm{Br}^s_\beta(\mathbb{S}^1)$ — клас поворотів кола зі зламом гладкості $s > 2$ та величиною зламу $c > 0$, $c \neq 1$.

Типи особливостей: поворот кола зі зламом

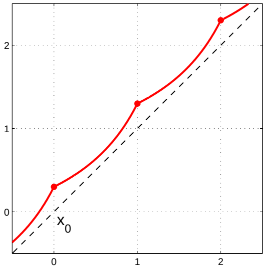
Розглядається $\mathrm{Br}^s_\beta(\mathbb{S}^1)$ — клас поворотів кола зі зламом гладкості $s > 2$ та величиною зламу $c > 0$, $c \neq 1$. $T \in \mathrm{Br}^s_c(\mathbb{S}^1)$, якщо

- $T \in H(\mathbb{S}^1)$,
- $L_T \in C^s([\xi_0, \xi_0 + 1])$, $s > 2$,
- $T'(\xi) \geq \mathrm{const} > 0$ при $\xi \neq \xi_0$,
- $T'(\xi_0-)/T'(\xi_0+) = c^2$.

Типи особливостей: поворот кола зі зламом

Розглядається $\mathrm{Br}^s_\beta(\mathbb{S}^1)$ — клас поворотів кола зі зламом гладкості $s > 2$ та величиною зламу $c > 0$, $c \neq 1$. $T \in \mathrm{Br}^s_c(\mathbb{S}^1)$, якщо

- $T \in H(\mathbb{S}^1)$,
- $L_T \in C^s([\xi_0, \xi_0 + 1])$, $s > 2$,
- $T'(\xi) \geq \mathrm{const} > 0$ при $\xi \neq \xi_0$,
- $T'(\xi_0-)/T'(\xi_0+) = c^2$.



Вади роблять життя простішим?

Відомо, що для класів $\mathrm{Cr}^s_{\beta,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$ та $\mathrm{Br}^s_{c,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$ має місце аналог теореми Данжуа: $T \sim \tilde{T} \;\Leftrightarrow\; \rho = \tilde{\rho}$.

Вади роблять життя простішим?

Відомо, що для класів $\mathrm{Cr}^s_{\beta,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$ та $\mathrm{Br}^s_{c,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$ має місце аналог теореми Данжуа: $T \sim \tilde{T} \;\Leftrightarrow\; \rho = \tilde{\rho}$.

Гіпотеза (Посилена жорсткість)

В кожному з класів $\mathrm{Cr}^s_{\beta,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$, $\beta > 1$, *та* $\mathrm{Br}^s_{c,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$, $0 < c \neq 1$, *маємо:* $T \approx \tilde{T} \;\Leftrightarrow\; \rho = \tilde{\rho}$.

Вади роблять життя простішим?

Відомо, що для класів $\mathrm{Cr}^s_{\beta,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$ та $\mathrm{Br}^s_{c,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$ має місце аналог теореми Данжуа: $T \sim \tilde{T} \;\Leftrightarrow\; \rho = \tilde{\rho}$.

Гіпотеза (Посилена жорсткість)

В кожному з класів $\mathrm{Cr}^s_{\beta,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$, $\beta > 1$, *та* $\mathrm{Br}^s_{c,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$, $0 < c \neq 1$, *маємо:* $T \approx \tilde{T} \;\Leftrightarrow\; \rho = \tilde{\rho}$.

При $\beta = 1$ зникає критична точка, при $c = 1$ зникає злам. Отже, $H_{\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1) \subset \mathrm{Cr}^s_{1,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1) = \mathrm{Br}^s_{1,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$. Але для $H_{\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$ гіпотеза не виконується, отже наявність особливості посилює жорсткість!

Доведені результати щодо посиленої жорсткості

Теорема (Посилена жорсткість для аналітичних критичних поворотів)

У класі $\mathrm{Cr}^{\omega}_{2m+1,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$, $m \in \mathbb{N}$, *маємо:* $\quad T \approx \tilde{T} \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \tilde{\rho}.$

Доведені результати щодо посиленої жорсткості

Теорема (Посилена жорсткість для аналітичних критичних поворотів)

У класі $\mathrm{Cr}^{\omega}_{2m+1,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$, $m \in \mathbb{N}$, *маємо:* $T \approx \tilde{T} \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \tilde{\rho}$.

Теорема (Посилена жорсткість для поворотів зі зламом)

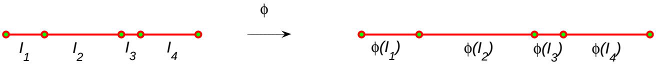
У класі $\mathrm{Br}^{s}_{c,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$, $c > 1$, *маємо:* $\rho = \tilde{\rho} \;\Leftrightarrow\; T \approx \tilde{T}$, *за умови* $\rho \in M_{\mathrm{odd}}$.
У класі $\mathrm{Br}^{s}_{c,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$, $c < 1$, *маємо:* $\rho = \tilde{\rho} \;\Leftrightarrow\; T \approx \tilde{T}$, *за умови* $\rho \in M_{\mathrm{even}}$.

(Обидва класи M_{odd} та M_{even} містять недіофантові числа!)

Як же доводиться гладкість спряження?

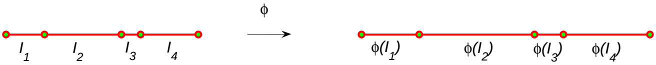
Як же доводиться гладкість спряження?

Гладкість — це локальна майже-лінійність. Будь-які маленькі сусідні відрізки мусять розтягуватися (або стискатися) гладкою заміною координат ϕ майже в однакову кількість разів:



Як же доводиться гладкість спряження?

Гладкість — це локальна майже-лінійність. Будь-які маленькі сусідні відрізки мусять розтягуватися (або стискатися) гладкою заміною координат ϕ майже в однакову кількість разів:



Будемо розглядати відрізки *динамічних розбиттів* кола, тобто розбиттів кола точками траєкторій $\xi_i = T^i(\xi_0)$, $0 \leq i < N_n$, та $\tilde{\xi}_i = \tilde{T}^i(\tilde{\xi}_0)$, $0 \leq i < N_n$.

Як же доводиться гладкість спряження?

Гладкість — це локальна майже-лінійність. Будь-які маленькі сусідні відрізки мусять розтягуватися (або стискатися) гладкою заміною координат ϕ майже в однакову кількість разів:

Будемо розглядати відрізки *динамічних розбиттів* кола, тобто розбиттів кола точками траєкторій $\xi_i = T^i(\xi_0)$, $0 \le i < N_n$, та $\tilde{\xi}_i = \tilde{T}^i(\tilde{\xi}_0)$, $0 \le i < N_n$. (Спряження ϕ зручно переводить ξ_i у $\tilde{\xi}_i$.)

Як же доводиться гладкість спряження?

Гладкість — це локальна майже-лінійність. Будь-які маленькі сусідні відрізки мусять розтягуватися (або стискатися) гладкою заміною координат ϕ майже в однакову кількість разів:

Будемо розглядати відрізки *динамічних розбиттів* кола, тобто розбиттів кола точками траєкторій $\xi_i = T^i(\xi_0)$, $0 \le i < N_n$, та $\tilde{\xi}_i = \tilde{T}^i(\tilde{\xi}_0)$, $0 \le i < N_n$. (Спряження ϕ зручно переводить ξ_i у $\tilde{\xi}_i$.)
Питання: на яких N_n найзручніше зупинятися?

Динамічні розбиття кола

Розкладемо число обертання в *ланцюговий дріб*:

$$\rho = \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \dots}} =: [k_1, k_2, \dots] \in (0,1) \backslash \mathbb{Q}$$

Розкладемо число обертання в *ланцюговий дріб*:

$$\rho = \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \dots}} =: [k_1, k_2, \dots] \in (0,1)\backslash\mathbb{Q}$$

Раціональні наближення: $\frac{p_n}{q_n} = [k_1, k_2, \dots, k_n] \to \rho$,

$$0 < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \frac{p_{2m}}{q_{2m}} < \dots < \rho < \dots < \frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}} < \dots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1} \leq 1$$

Динамічні розбиття кола

Розкладемо число обертання в *ланцюговий дріб*:

$$\rho = \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \dots}} =: [k_1, k_2, \dots] \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$$

Раціональні наближення: $\frac{p_n}{q_n} = [k_1, k_2, \dots, k_n] \to \rho$,

$$0 < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \frac{p_{2m}}{q_{2m}} < \dots < \rho < \dots < \frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}} < \dots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1} \leq 1$$

На колі їм відповідають *динамічні наближення*: $\xi_{q_n} \to \xi_0$,

$$\xi_{q_1} < \xi_{q_3} < \dots < \xi_{q_{2m+1}} < \dots < \xi_0 < \dots < \xi_{q_{2m}} < \dots < \xi_{q_4} < \xi_{q_2}$$

Динамічні розбиття кола (продовження)

За динамічними наближеннями

$$\xi_{q_1} < \xi_{q_3} < \cdots < \xi_{q_{2m+1}} < \cdots < \xi_0 < \cdots < \xi_{q_{2m}} < \cdots < \xi_{q_4} < \xi_{q_2}$$

визначаються *фундаментальні інтервали* на колі:
$\Delta_0^{(n)} = [\xi_0, \xi_{q_n}]$ для парних n, $\Delta_0^{(n)} = [\xi_{q_n}, \xi_0]$ для непарних n.

Динамічні розбиття кола (продовження)

За динамічними наближеннями

$$\xi_{q_1} < \xi_{q_3} < \cdots < \xi_{q_{2m+1}} < \cdots < \xi_0 < \cdots < \xi_{q_{2m}} < \cdots < \xi_{q_4} < \xi_{q_2}$$

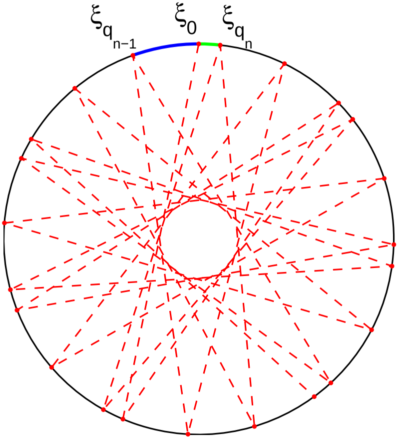
визначаються *фундаментальні інтервали* на колі:
$\Delta_0^{(n)} = [\xi_0, \xi_{q_n}]$ для парних n, $\Delta_0^{(n)} = [\xi_{q_n}, \xi_0]$ для непарних n.

Фундаментальне розбиття кола $\mathcal{P}_n$ — це його розбиття точками траєкторії $\xi_i = T^i(\xi_0)$, $0 \leq i < q_n + q_{n-1}$.

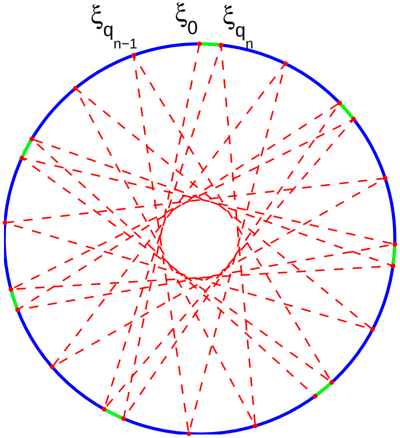
Твердження

$\mathcal{P}_n = \{T^i \Delta_0^{(n-1)}, 0 \leq i < q_n\} \cup \{T^i \Delta_0^{(n)}, 0 \leq i < q_{n-1}\}$.

Динамічні розбиття кола (ілюстрація)



Динамічні розбиття кола (ілюстрація)



Динамічні розбиття кола (продовження)

Фундаментальні інтервали $\Delta_0^{(n-1)}$ та $\Delta_0^{(n)}$ ітеруються q_n та q_{n-1} разів відповідно, при цьому покриваючи усе коло:

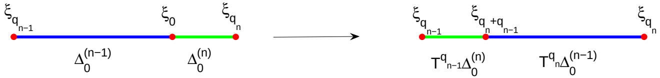
$$\mathbb{S}^1 = \bigcup_{0 \le i < q_n} T^i \Delta_0^{(n-1)} \cup \bigcup_{0 \le i < q_{n-1}} T^i \Delta_0^{(n)} = \bigcup_{I \in \mathcal{P}_n} I.$$

Динамічні розбиття кола (продовження)

Фундаментальні інтервали $\Delta_0^{(n-1)}$ та $\Delta_0^{(n)}$ ітеруються q_n та q_{n-1} разів відповідно, при цьому покриваючи усе коло:

$$\mathbb{S}^1 = \bigcup_{0\le i<q_n} T^i\Delta_0^{(n-1)} \cup \bigcup_{0\le i<q_{n-1}} T^i\Delta_0^{(n)} = \bigcup_{I\in\mathcal{P}_n} I.$$

Наступні ітерації $T^{q_n}\Delta_0^{(n-1)}$ та $T^{q_{n-1}}\Delta_0^{(n)}$ вертаються на $\Delta_0^{(n-1)} \cup \Delta_0^{(n)}$:

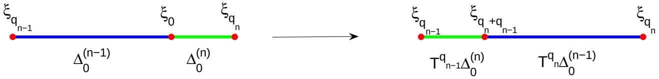


Динамічні розбиття кола (продовження)

Фундаментальні інтервали $\Delta_0^{(n-1)}$ та $\Delta_0^{(n)}$ ітеруються q_n та q_{n-1} разів відповідно, при цьому покриваючи усе коло:

$$\mathbb{S}^1 = \bigcup_{0 \le i < q_n} T^i \Delta_0^{(n-1)} \cup \bigcup_{0 \le i < q_{n-1}} T^i \Delta_0^{(n)} = \bigcup_{I \in \mathcal{P}_n} I.$$

Наступні ітерації $T^{q_n}\Delta_0^{(n-1)}$ та $T^{q_{n-1}}\Delta_0^{(n)}$ вертаються на $\Delta_0^{(n-1)} \cup \Delta_0^{(n)}$:

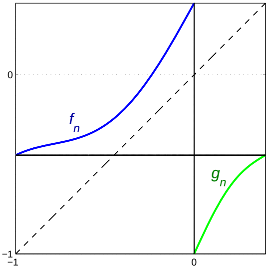


Перенормувавши інтервал $\Delta_0^{(n-1)} \cup \Delta_0^{(n)}$ так, що $\xi_{q_{n-1}}$ і ξ_0 стають -1 і 0 відповідно, отримуємо n-ту *ренормалізацію* гомеоморфізму T.

Ренормалізаційний мікроскоп

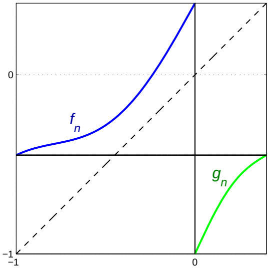
Ренормалізація кроку n гомеоморфізму T — це пара неперервних функцій (f_n, g_n), що складають відображення першого повернення траєкторій на проміжок $\Delta_0^{(n-1)} \cup \Delta_0^{(n)}$:

$$f_n \text{ — це перенормоване } T^{q_n} \text{ на } \Delta_0^{(n-1)},$$
$$g_n \text{ — це перенормоване } T^{q_{n-1}} \text{ на } \Delta_0^{(n)}.$$



Ренормалізація кроку n гомеоморфізму T — це пара неперервних функцій (f_n, g_n), що складають відображення першого повернення траєкторій на проміжок $\Delta_0^{(n-1)} \cup \Delta_0^{(n)}$:

$$f_n \text{ — це перенормоване } T^{q_n} \text{ на } \Delta_0^{(n-1)},$$
$$g_n \text{ — це перенормоване } T^{q_{n-1}} \text{ на } \Delta_0^{(n)}.$$



Якщо тепер *правильно* склеїти цю пару функцій, то одержимо інший вигляд ренормалізації кроку n — гомеоморфізм одиничного кола T_n з числом обертання $\rho_n = [k_n, k_{n+1}, \dots]$.

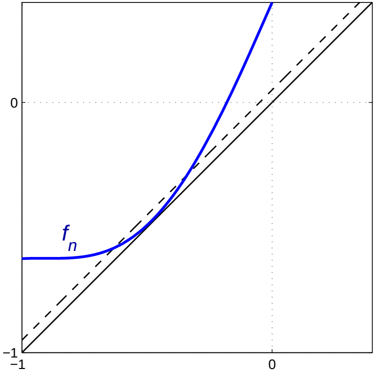
Умовна теорема

Теорема (Теплінський-Ханін, 2007)

Нехай для двох дифеоморфізмів кола з особливостями T і $\tilde{T}$ виконуються умови
1) $\rho = \tilde{\rho} \notin \mathbb{Q}$;
2) динамічні розбиття подрібнюються експоненційно швидко за n;
3) ренормалізації f_n і $\tilde{f}_n$ зближуються в нормі $C^2([-1,0])$ експоненційно швидко за n;
4) ренормалізації f_n і $\tilde{f}_n$ регулярні рівномірно за n. Тоді $T \approx \tilde{T}$ (тобто вони є спряженими гладкою заміною координат).

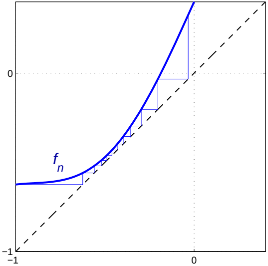
Пояснення умови регулярності ренормалізацій

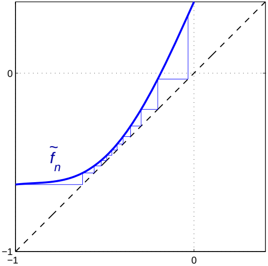
Умова 4) теореми спрощено означає наступне:



якщо f_n близько підходить до діагоналі, то цей майже-дотик має виражену опуклість в сенсі $f_n'' \geq \text{const} > 0$.

Доведення умовної теореми





Регулярність дає контроль за довжиною відрізків-сходинок — виписуються дуже точні асимптотики. Ці асимптотики дозволяють вивести з близькості f_n до $\tilde{f}_n$ близькість довжин усіх відповідних сходинок, навіть якщо їх як завгодно багато (тобто навіть при недіофантових числах обертання). QED ;)

Збіжність ренормалізацій випливає з гіперболічності $\mathcal{R}$

Можна формально означити *ренорм-оператор* $\mathcal{R}$, що діє на пари функцій таким чином, що автоматично $(f_n, g_n) = \mathcal{R}(f_{n-1}, g_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$.

Збіжність ренормалізацій випливає з гіперболічності $\mathcal{R}$

Можна формально означити *ренорм-оператор* $\mathcal{R}$, що діє на пари функцій таким чином, що автоматично $(f_n, g_n) = \mathcal{R}(f_{n-1}, g_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$.

Гіпотеза ("Програма Ланфорда", 1988)

Ренорм-оператор $\mathcal{R}$ на певному просторі пар (f, g) є рівномірно гіперболічним з єдиним розтягуючим напрямком, який відповідає зміні числа обертання.

Збіжність ренормалізацій випливає з гіперболічності $\mathcal{R}$

Можна формально означити *ренорм-оператор* $\mathcal{R}$, що діє на пари функцій таким чином, що автоматично $(f_n, g_n) = \mathcal{R}(f_{n-1}, g_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$.

Гіпотеза ("Програма Ланфорда", 1988)

Ренорм-оператор $\mathcal{R}$ на певному просторі пар (f, g) є рівномірно гіперболічним з єдиним розтягуючим напрямком, який відповідає зміні числа обертання.

- Для аналітичних критичних поворотів кола (класи $\mathrm{Cr}^{\omega}_{2m+1}(\mathbb{S}^1)$, $m \in \mathbb{N}$) Програма Ланфорда виконана Ямпольським (2001–03).

Збіжність ренормалізацій випливає з гіперболічності $\mathcal{R}$

Можна формально означити *ренорм-оператор* $\mathcal{R}$, що діє на пари функцій таким чином, що автоматично $(f_n, g_n) = \mathcal{R}(f_{n-1}, g_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$.

Гіпотеза ("Програма Ланфорда", 1988)

Ренорм-оператор $\mathcal{R}$ на певному просторі пар (f, g) є рівномірно гіперболічним з єдиним розтягуючим напрямком, який відповідає зміні числа обертання.

- Для аналітичних критичних поворотів кола (класи $\mathrm{Cr}^{\omega}_{2m+1}(\mathbb{S}^1)$, $m \in \mathbb{N}$) Програма Ланфорда виконана Ямпольським (2001–03).
- Для поворотів зі зламом (класи $\mathrm{Br}^{s}_{c}(\mathbb{S}^1)$, $s > 2$, $0 < c \neq 1$) — Теплінським та Ханіним (1990–2008).

Збіжність ренормалізацій випливає з гіперболічності $\mathcal{R}$

Можна формально означити *ренорм-оператор* $\mathcal{R}$, що діє на пари функцій таким чином, що автоматично $(f_n, g_n) = \mathcal{R}(f_{n-1}, g_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$.

Гіпотеза ("Програма Ланфорда", 1988)

Ренорм-оператор $\mathcal{R}$ на певному просторі пар (f, g) є рівномірно гіперболічним з єдиним розтягуючим напрямком, який відповідає зміні числа обертання.

- Для аналітичних критичних поворотів кола (класи $\mathrm{Cr}^{\omega}_{2m+1}(\mathbb{S}^1)$, $m \in \mathbb{N}$) Програма Ланфорда виконана Ямпольським (2001–03).
- Для поворотів зі зламом (класи $\mathrm{Br}^{s}_{c}(\mathbb{S}^1)$, $s > 2$, $0 < c \neq 1$) — Теплінським та Ханіним (1990–2008).
- Для класів $\mathrm{Cr}^{s}_{\beta}(\mathbb{S}^1)$, $\beta \neq 2m+1$, проблема залишається цілковито відкритою.

Збіжність ренормалізацій випливає з гіперболічності $\mathcal{R}$

Можна формально означити *ренорм-оператор* $\mathcal{R}$, що діє на пари функцій таким чином, що автоматично $(f_n, g_n) = \mathcal{R}(f_{n-1}, g_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$.

Гіпотеза ("Програма Ланфорда", 1988)

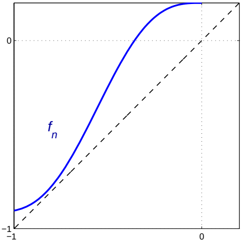
Ренорм-оператор $\mathcal{R}$ на певному просторі пар (f, g) є рівномірно гіперболічним з єдиним розтягуючим напрямком, який відповідає зміні числа обертання.

- Для аналітичних критичних поворотів кола (класи $\mathrm{Cr}^{\omega}_{2m+1}(\mathbb{S}^1)$, $m \in \mathbb{N}$) Програма Ланфорда виконана Ямпольським (2001–03).
- Для поворотів зі зламом (класи $\mathrm{Br}^s_c(\mathbb{S}^1)$, $s > 2$, $0 < c \neq 1$) — Теплінським та Ханіним (1990–2008).
- Для класів $\mathrm{Cr}^s_\beta(\mathbb{S}^1)$, $\beta \neq 2m+1$, проблема залишається цілковито відкритою.

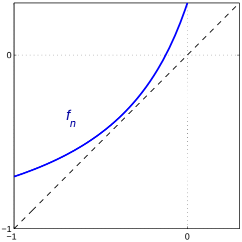
(Для класу $H^s(\mathbb{S}^1)$, $s > 2$, ця Програма вироджується у тривіальну: ренормалізації дифеоморфізмів прямують до лінійних функцій.)

Регулярність забезпечують вади

Критичний поворот

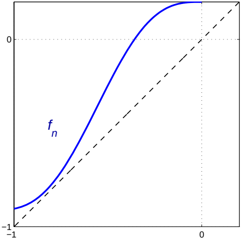


Поворот зі зламом

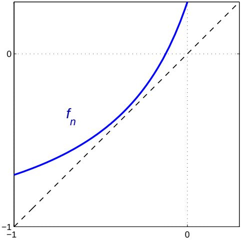


Регулярність забезпечують вади

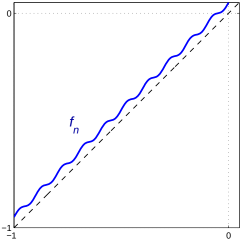
Критичний поворот



Поворот зі зламом



Дифеоморфізм



“Почётная жёсткость” для поворотів зі зламом

Теорема (Посилена жорсткість для поворотів зі зламом)

У класі $\mathrm{Br}^{s}_{c,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$, $c>1$, *маємо:* $\rho=\tilde{\rho} \;\Leftrightarrow\; T\approx\tilde{T}$, *за умови* $\rho\in M_{\mathrm{odd}}$.

У класі $\mathrm{Br}^{s}_{c,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$, $c<1$, *маємо:* $\rho=\tilde{\rho} \;\Leftrightarrow\; T\approx\tilde{T}$, *за умови* $\rho\in M_{\mathrm{even}}$.

“Почётная жёсткость” для поворотів зі зламом

Теорема (Посилена жорсткість для поворотів зі зламом)

У класі $\mathrm{Br}^s_{c,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$, $c > 1$, *маємо:* $\rho = \tilde{\rho} \;\Leftrightarrow\; T \approx \tilde{T}$, *за умови* $\rho \in M_{\mathrm{odd}}$.

У класі $\mathrm{Br}^s_{c,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$, $c < 1$, *маємо:* $\rho = \tilde{\rho} \;\Leftrightarrow\; T \approx \tilde{T}$, *за умови* $\rho \in M_{\mathrm{even}}$.

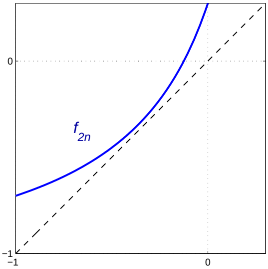
$$M_{\mathrm{odd}} = \{\rho : (\exists C > 0)\ (\forall n \in \mathbb{N})\ k_{2n-1} \leq C\},$$
$$M_{\mathrm{even}} = \{\rho : (\exists C > 0)\ (\forall n \in \mathbb{N})\ k_{2n} \leq C\}.$$

Теорема (Посилена жорсткість для поворотів зі зламом)

У класі $\mathrm{Br}^s_{c,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$, $c > 1$, *маємо:* $\rho = \tilde{\rho} \;\Leftrightarrow\; T \approx \tilde{T}$, *за умови* $\rho \in M_{\mathrm{odd}}$.

У класі $\mathrm{Br}^s_{c,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$, $c < 1$, *маємо:* $\rho = \tilde{\rho} \;\Leftrightarrow\; T \approx \tilde{T}$, *за умови* $\rho \in M_{\mathrm{even}}$.

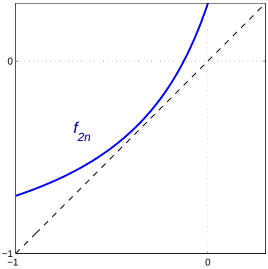
$$M_{\mathrm{odd}} = \{\rho : (\exists C > 0)\ (\forall n \in \mathbb{N})\ k_{2n-1} \le C\},$$
$$M_{\mathrm{even}} = \{\rho : (\exists C > 0)\ (\forall n \in \mathbb{N})\ k_{2n} \le C\}.$$



Теорема (Посилена жорсткість для поворотів зі зламом)

У класі $\mathrm{Br}^s_{c,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$, $c > 1$, *маємо:* $\rho = \tilde{\rho} \;\Leftrightarrow\; T \approx \tilde{T}$, *за умови* $\rho \in M_{\mathrm{odd}}$.
У класі $\mathrm{Br}^s_{c,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$, $c < 1$, *маємо:* $\rho = \tilde{\rho} \;\Leftrightarrow\; T \approx \tilde{T}$, *за умови* $\rho \in M_{\mathrm{even}}$.

$$M_{\mathrm{odd}} = \{\rho : (\exists C > 0)\ (\forall n \in \mathbb{N})\ k_{2n-1} \le C\},$$
$$M_{\mathrm{even}} = \{\rho : (\exists C > 0)\ (\forall n \in \mathbb{N})\ k_{2n} \le C\}.$$



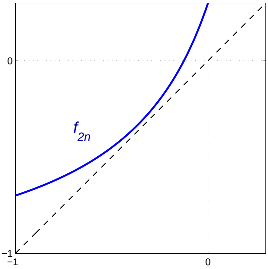
Парні ренормалізації

“Почётная жёсткость” для поворотів зі зламом

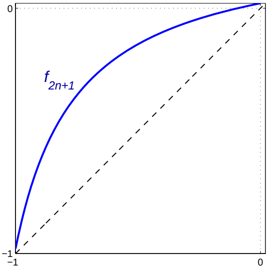
Теорема (Посилена жорсткість для поворотів зі зламом)

У класі $\mathrm{Br}^s_{c,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$, $c>1$, *маємо:* $\rho=\tilde\rho \;\Leftrightarrow\; T\approx\tilde T$, *за умови* $\rho\in M_{\mathrm{odd}}$.
У класі $\mathrm{Br}^s_{c,\mathrm{irr}}(\mathbb{S}^1)$, $c<1$, *маємо:* $\rho=\tilde\rho \;\Leftrightarrow\; T\approx\tilde T$, *за умови* $\rho\in M_{\mathrm{even}}$.

$$M_{\mathrm{odd}}=\{\rho:(\exists C>0)\ (\forall n\in\mathbb{N})\ k_{2n-1}\le C\},$$
$$M_{\mathrm{even}}=\{\rho:(\exists C>0)\ (\forall n\in\mathbb{N})\ k_{2n}\le C\}.$$



Парні ренормалізації



Непарні ренормалізації

Дякую за увагу!